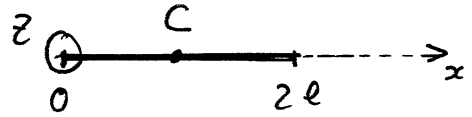
Examen de Mécanique du Solide
8 novembre 2010

Ex 1 : a) Calcul de moment d'inertie : barre homogène : $\lambda = \frac{m}{2\ell} = c^{te}$

C : centre de la barre, (Cz) axe de symétrie



$$I_{Cz} = \int_{-\ell}^{\ell} \lambda \, dx \, x^2 = \frac{\lambda}{3} 2\ell^3 = \frac{1}{3} m\ell^2$$

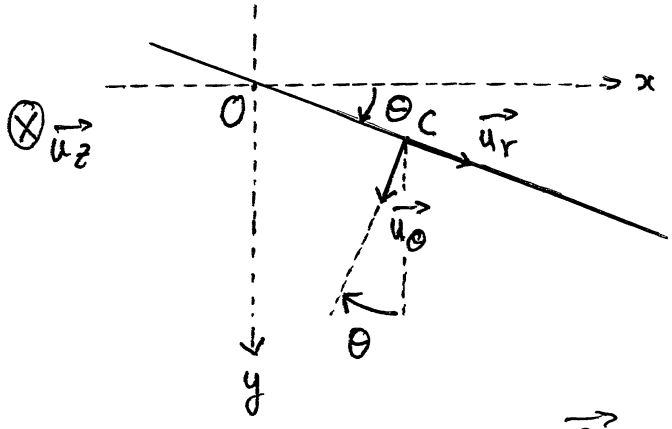
Th Huygens : $I_{(Oz)} = I_{(Cz)} + m\ell^2$ car centre de gravité de la barre $\in (Cz)$

$$I_{(Oz)} = \frac{4}{3} m\ell^2$$

b) Vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}$: Formule Varignon $\begin{cases} \frac{d}{dt} \vec{AB} = \vec{\Omega} \wedge \vec{AB} \\ \forall A, B \in \text{Solide} \end{cases}$

avec O et C : $\frac{d}{dt} \vec{OC} = \vec{v}(C) - \vec{v}(O) = \vec{\Omega} \wedge \vec{OC}$ (1)

le mouvement de C est sur un cercle donc $\vec{v}(C) = b\dot{\theta}\, \vec{u_\theta}$ et $\vec{v}(O) = \vec{0}$



$\vec{OC} = b\vec{u_r}$ en plaine

$\Rightarrow \vec{v}(C) = b\dot{\theta}\, \vec{u_\theta}$

le mouvement de la barre est dans un plan donc $\vec{\Omega} \perp$ ce plan : $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u_z}$

$$(1) \Rightarrow \vec{\Omega} \wedge \vec{OC} = \Omega b \vec{u_\theta} = \vec{v}(C) = b\dot{\theta}\, \vec{u_\theta}$$

donc $\Omega = \dot{\theta}$ et $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\, \vec{u_z}$

b2) Energie cinétique : Th Kœnig : $E_c = \frac{1}{2} m\, v(C)^2 + E_c^*$

car C centre de masse

E_c^* énergie cinétique barycentrique $E_c^* = \frac{1}{2} J_{(Cz)} \dot{\theta}^2$ ← car $\vec{\Omega}^* = \vec{\Omega}$ C dans (R^*)

$$\Rightarrow E_c = \frac{1}{2} m (b\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{3} m\ell^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m \left(b^2 + \frac{\ell^2}{3}\right) \dot{\theta}^2$$

b.3) Th de l'énergie cinétique : $\Delta E_c = \Sigma$ travaux forces extérieures sur la barre

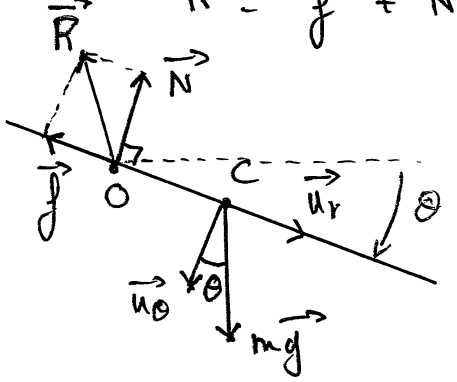
forces extérieures : • $m\vec{g}$ pt d'application C
• force $\vec{R}$ de l'axe (Oz) sur la barre : pt application O
$\vec{R}$ ne travaille pas car $\vec{v}(O) = 0$ (pas de glissement)

$$\Delta E_c = W(\text{poids}) \Rightarrow E_c(\theta) - \underbrace{E_c(\theta=0)}_{=0 \text{ initial}} = \underbrace{mg\, b \sin\theta}_{\hookrightarrow = mg \,\Delta\text{hauteur}}$$

soit $$\dot\theta = \sqrt{\frac{2gb\sin\theta}{b^2 + \ell^2/3}} > 0$$ ↖ OK, car la barre tombe

c) La barre commence à glisser en O lorsque la condition de frottement statique en O n'est plus satisfaite : $\vec{R}$: force de l'axe (Oz) sur barre

$\vec{R} = \vec{f} + \vec{N}$: frottement statique $\Leftrightarrow \underbrace{\|\vec{f}\| \le \mu \|\vec{N}\|}_{\uparrow \text{condition}}$



Il faut donc calculer f et N en fonction de θ soient : $\vec{f} = -f\,\vec{u}_r \qquad \vec{N} = -N\,\vec{u}_\theta$

Principe fondamental dynamique dans Réf du sol :

$$m \frac{d}{c/r}\vec{v}(C) = \vec{f} + \vec{N} + m\vec{g}$$

or d'après b) $\dot\theta^2 = \frac{2gb\sin\theta}{b^2 + \ell^2/3}$ donc $\ddot\theta = \frac{gb\cos\theta}{b^2 + \ell^2/3}$

et $$m \frac{d}{c/r}\vec{v}(C) = mb\left(\ddot\theta\,\vec{u}_\theta - \dot\theta^2 \vec{u}_r\right) = -f\,\vec{u}_r - N\,\vec{u}_\theta + mg\,\vec{u}_y$$

avec $\vec{u}_y = \cos\theta\,\vec{u}_\theta + \sin\theta\,\vec{u}_r$ donc : $\begin{cases} -\dot\theta^2 mb = -f + mg\sin\theta \\ mb\ddot\theta = -N + mg\cos\theta \end{cases}$

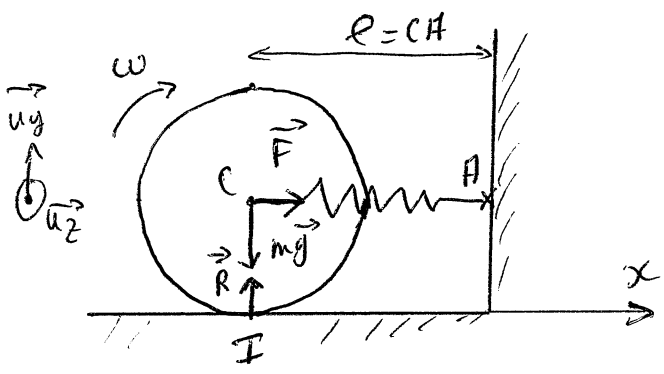
$$\Rightarrow \begin{cases} f = mg\sin\theta + \dot\theta^2 mb = \dfrac{gb^2+\ell^2}{3b^2+\ell^2}\, mg\sin\theta \\ N = mg\cos\theta - mb\ddot\theta = \dfrac{\ell^2}{3b^2+\ell^2}\, mg\cos\theta \end{cases}$$

$f \le \mu N$

$$\Rightarrow \tan\theta \le \frac{\ell^2 \mu}{gb^2+\ell^2} = \tan\theta_1$$

Si $\theta > \theta_1 \Rightarrow$ glissement

Ex 2 : Oscillations d'un cylindre



$\vec{\Omega} = -\omega \vec{u_z}$

Forces sur le cylindre :

- $\vec{F} = +k(\ell - \ell_0)\vec{u_x}$ pt application C
- $m\vec{g}$ " C
- $\vec{R} = \vec{f} + \vec{N}$ " **I**

pas glissement donc frottement statique en I

$\|\vec{f}\| \leq \mu \|\vec{N}\|$

- Principe fondamental de la dynamique dans ref du sol Galiléen (R) : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}(C)$ (1)

avec $\vec{a}(C) = \ddot{x}\,\vec{u_x}$

à l'équilibre $\vec{a}(C) = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} + m\vec{g} + \vec{R} = \vec{0}$ (2)

- Dans (R^*) : th moment cinétique (barycentrique) $\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \underbrace{\vec{CC} \wedge \vec{F}}_{=\vec{0}} + \underbrace{\vec{CC} \wedge m\vec{g}}_{=\vec{0}} + \vec{CI} \wedge \vec{f} + \underbrace{\vec{CI} \wedge \vec{N}}_{=\vec{0}}$ (3) car $\vec{CI} // \vec{N}$

avec $\vec{L}^* = -J\omega\,\vec{u_z}$ et $\vec{f} = f\,\vec{u_x}$

donc $-J\dot{\omega}\,\vec{u_z} = bf\,\vec{u_z}$ soit $f = -\frac{J\dot{\omega}}{b}$ (4)

à l'équilibre $\dot{\omega} = 0 \Rightarrow f = 0 \underset{(2)}{\Rightarrow} \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \ell = \ell_0$

Choix : origine de x ($x = 0$) à l'équilibre ; donc hors équilibre : $\ell = \ell_0 - x$

- Relation entre ω et $\dot{x}$: pas de glissement en I : $\vec{v}(I) = \vec{0}$ ($\in$ solide)

$\frac{d\vec{CI}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{CI} \Rightarrow \vec{v}(I) - \vec{v}(C) = -b\omega\,\vec{u_x} \Rightarrow \dot{x} = b\omega$ (5) $\Rightarrow \ddot{x} = b\dot{\omega}$ (6)

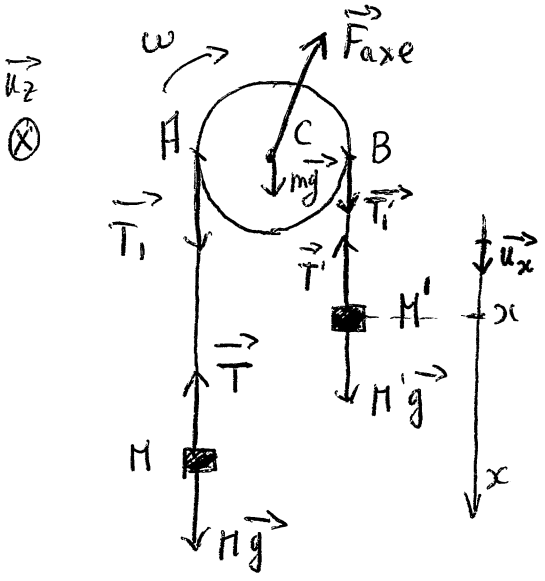
- D'après (4) et (6) : $f = -J\ddot{x}/b^2$

(1) $\Rightarrow \vec{F} + m\vec{g} + \vec{f} + \vec{N} = m\ddot{x}\,\vec{u_x}$: proj. sur $\vec{u_x}$: $-kx - \frac{J}{b^2}\ddot{x} = m\ddot{x}$

$\Rightarrow \ddot{x} = -\frac{k}{m + J/b^2}\,x$ soit $\alpha = \sqrt{\frac{k}{m + J/b^2}} = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$

$\Rightarrow x = A\cos\alpha t + B\sin\alpha t$ avec A et B constantes et période $T = \frac{2\pi}{\alpha} = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{2k}}$

Ex3. Machine d'Atwood



- forces sur M' : $M'\vec{g}$ et $\vec{T}'$
- forces sur M : $M\vec{g}$ et $\vec{T}$
- forces sur la poulie : $\vec{T}_1$, et $\vec{T}_1'$, $\vec{F}_{axe}$, $m\vec{g}$

le long d'un fil, de masse nulle, la tension est conservée donc $\vec{T}_1 = -\vec{T}$ et $\vec{T}_1' = -\vec{T}'$

mais $\vec{T}_1 \neq \vec{T}_1'$ ⚠

Soit x la position verticale de M' : vitesse de M' : $\dot{x}\,\vec{u_x}$

" de M : $-\dot{x}\,\vec{u_x}$

le fil ne glisse pas (sur la poulie) donc la poulie tourne à la vitesse angulaire $\omega = \dot{x}/b$ (1)

a) Dans (R), réf. du sol (Galiléen) :

$$\Sigma \vec{F}_{ext\,sur\,M'} = M'\ddot{x}\,\vec{u_x} = \vec{T}' + M'\vec{g}$$
$$\Sigma \vec{F}_{ext\,sur\,M} = -M\ddot{x}\,\vec{u_x} = \vec{T} + M\vec{g}$$

avec $\vec{T} = -T\vec{u_x}$; et $\vec{T}' = -T'\vec{u_x}$ on obtient $M'\ddot{x} = -T' + M'g$ (2)

($\vec{T}_1 = T\vec{u_x}$ et $\vec{T}_1' = T'\vec{u_x}$) et $-M\ddot{x} = -T + Mg$ (3)

th. du moment cinétique sur la poulie : $\frac{d}{dt}\vec{L_C} = \vec{CC}\wedge\vec{F}_{axe} + \vec{CC}\wedge m\vec{g} + \vec{CA}\wedge\vec{T}_1 + \vec{CB}\wedge\vec{T}_1'$

($\vec{CC}\wedge\vec{F}_{axe} = \vec{0}$; $\vec{CC}\wedge m\vec{g} = \vec{0}$)

soit (avec (2) et (3)) $J\dot{\omega}\,\vec{u_z} = (-Tb + T'b)\vec{u_z} = (-b(M+M')\ddot{x} - Mbg + M'bg)\vec{u_z}$

avec (1) $\Rightarrow \left(\frac{J}{b^2} + M + M'\right)\ddot{x} = (M'-M)g$ soit $\boxed{\ddot{x} = \frac{(M'-M)g}{M+M'+J/b^2}}$

b) Energie cinétique de l'ensemble {fil, poulie, M, M'} : E_c

$E_c = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M'\dot{x}^2$

Seuls les poids de M et M' travaillent } th. puissance cinétique : $\frac{d}{dt}E_c = M\vec{g}\cdot\vec{v}_M + M'\vec{g}\cdot\vec{v}_{M'}$

donc $\left(\frac{J}{b^2} + M + M'\right)\ddot{x}\,\dot{x} = (M'-M)g\,\dot{x} \Rightarrow \boxed{\ddot{x} = \frac{M'-M}{M+M'+J/b^2}\,g}$